

Corrente alternada



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

<http://cursos.if.uff.br/fisica2-2015/>

Oscilações forçadas (RLC com fem)

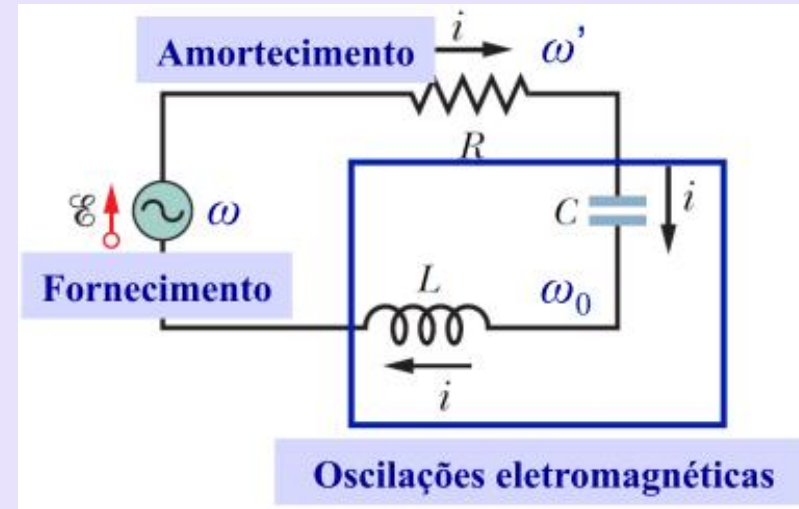
As oscilações de um circuito RLC não serão totalmente amortecidas se um dispositivo de *fem* externo fornecer energia suficiente para compensar a energia térmica dissipada no resistor.

Normalmente, este dispositivo é um gerador de tensão alternada com fem do tipo:

$$\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} \text{ sen } \omega t$$

As oscilações de $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$ são *oscilações forçadas*. Veremos que, qualquer que seja a frequência angular natural ω_0 de um circuito, estas oscilações ocorrem sempre na *frequência angular propulsora* ω . Mostramos aqui a solução para a corrente:

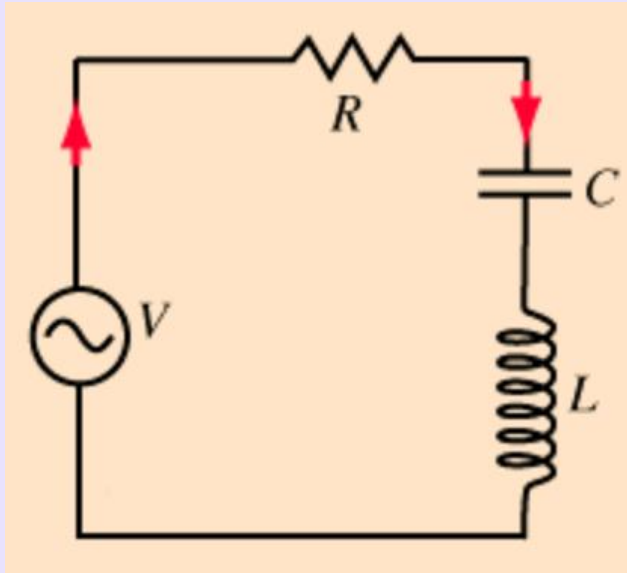
$$i = i_{m\acute{a}x} \text{ sen}(\omega t - \varphi)$$



Oscilações forçadas (RLC com fem)

“A corrente alternada em todos os pontos do circuito de corrente alternada em série, tem a mesma amplitude e a mesma fase.”

⇒ A voltagem em cada componente terá amplitude e fases diferentes.



$$\Delta v_L + \Delta v_R + \Delta v_C = \Delta v_\varepsilon$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon_{máx} \text{sen} \omega t$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_{máx} \text{sen} \omega t$$



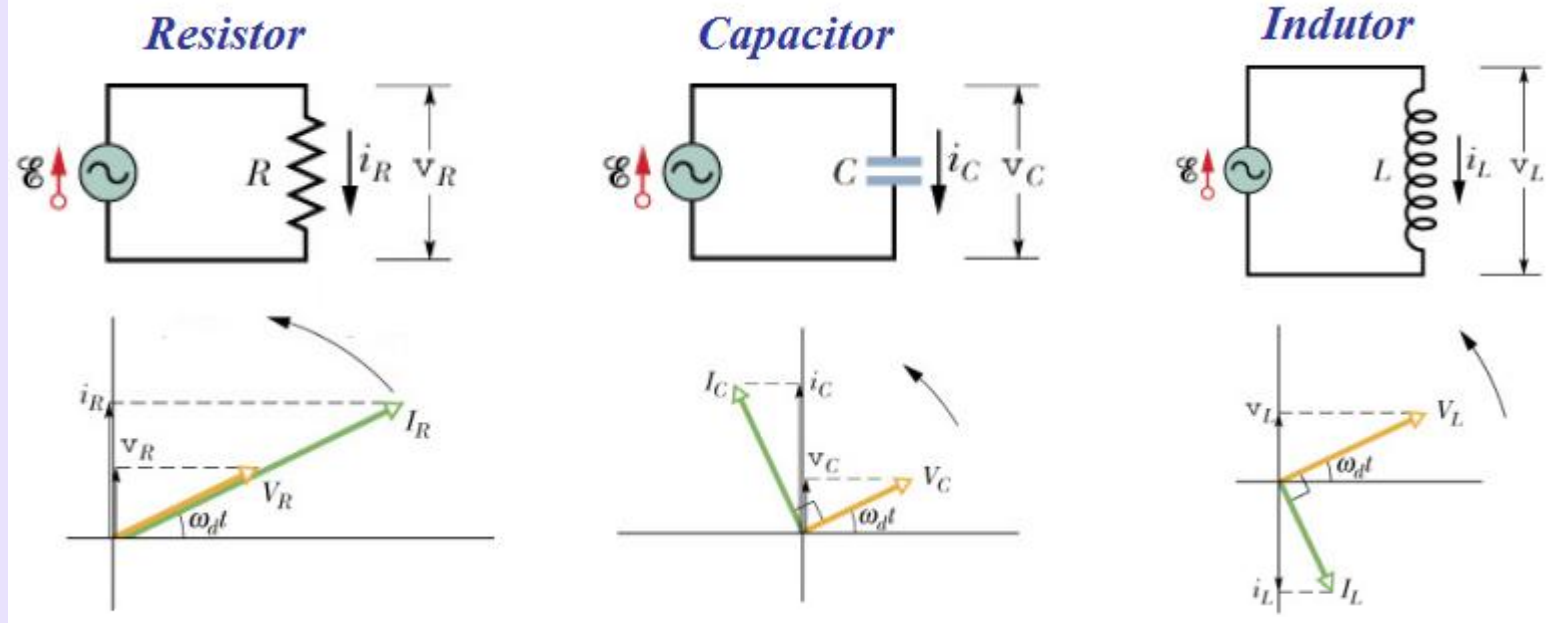
eq. diferencial que descreve
o circuito

$$\Rightarrow i(t) = i_{máx} \text{sen}(\omega t - \varphi) \Rightarrow \begin{cases} i_{máx} \rightarrow \text{corrente máxima} \\ \varphi \rightarrow \text{ângulo de fase entre} \\ \text{a corrente e a voltagem} \end{cases}$$

Objetivo ⇒ determinar $i_{máx}$ e φ



Revisão: Três circuitos simples



$$i_R = I_R \sin(\omega t)$$

$$V_R = I_R R$$

$$\varphi = 0$$

$\Rightarrow i$ em fase

$$v_R = V_R \sin \omega t$$

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_C = I_C X_C$$

$$\varphi = -\pi/2$$

$\Rightarrow i$ adiantada

$$v_C = V_C \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$i_L = \frac{V_L}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_L = I_L X_L$$

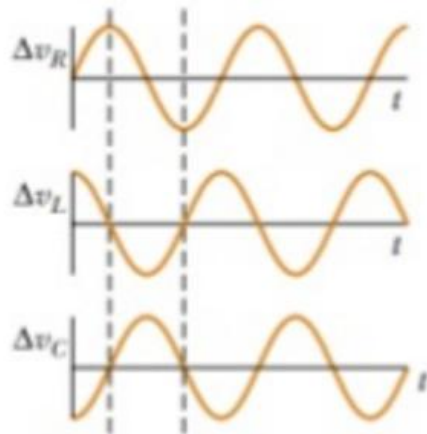
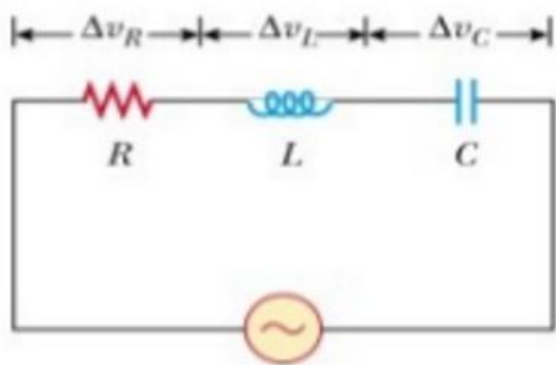
$$\varphi = +\pi/2$$

$\Rightarrow i$ atrasada

$$v_L = V_L \sin(\omega t + \pi/2)$$



O Circuito RLC Série



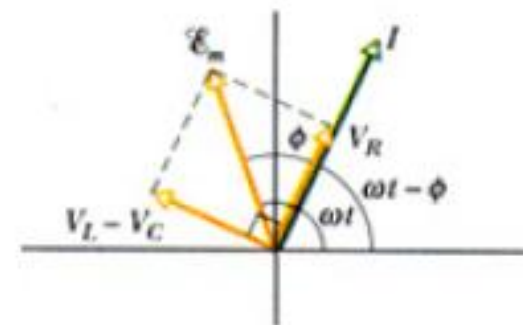
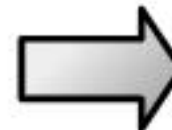
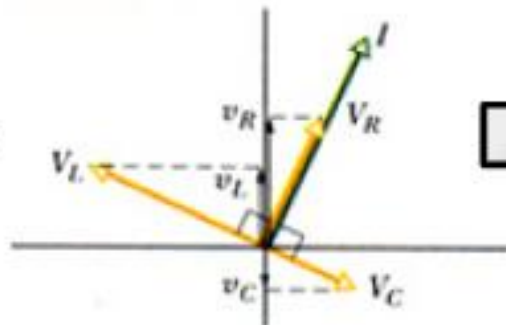
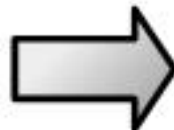
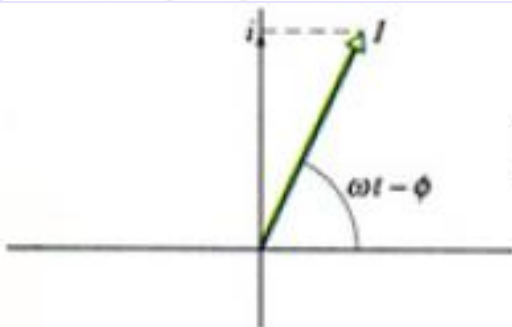
$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_{máx} \text{ sen } \omega t \rightarrow \text{fem aplicada} \\ i(t) = i_{máx} \text{ sen } (\omega t - \varphi) \rightarrow \text{corrente permanente} \end{cases}$$

Devemos determinar $i_{máx}$ e φ em função das grandezas R , L , C , $\varepsilon_{máx}$ e ω .

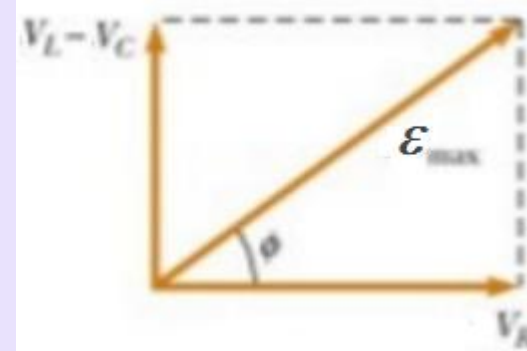
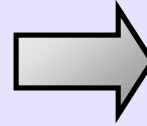
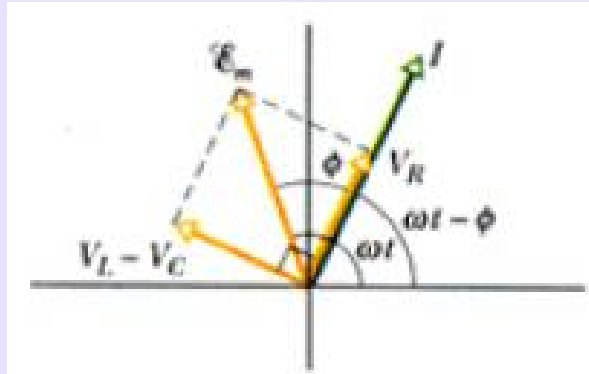
A corrente i tem o mesmo valor em todos os elementos e é representada por um **único fasor** (vetor girante) no diagrama. Para qualquer tempo :

$$\varepsilon = v_R + v_L + v_C$$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon}_{máx} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$$



O Circuito RLC Série



supondo que : $V_L > V_C$

do triângulo de fasores $\Rightarrow (\varepsilon_{m\acute{a}x})^2 = (V_R)^2 + (V_L - V_C)^2$

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \sqrt{(i_{m\acute{a}x}R)^2 + (i_{m\acute{a}x}X_L - i_{m\acute{a}x}X_C)^2}$$

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = i_{m\acute{a}x} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\Rightarrow i_{m\acute{a}x} = \frac{\varepsilon_{m\acute{a}x}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$



corrente máxima no circuito

onde $X_L = \omega L$ e $X_C = 1/\omega C$.



O Circuito RLC Série

$$\text{Fazendo : } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \rightarrow \text{impedância}$$

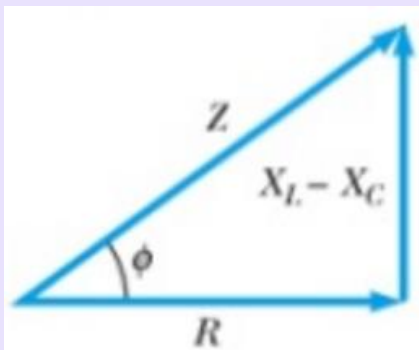
$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{máx}} = i_{\text{máx}} Z \quad [Z \rightarrow \text{Ohm}]$$

➡ Forma generalizada da lei de Ohm aplicada ao circuito AC

Obs: $i=i(R,L,C,\omega)$ a corrente depende da frequência ω .

Constante de fase:

Triângulo de impedância



$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

➡ relação de fase entre a corrente e a voltagem.



Constante de fase

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

Circuito indutivo

$X_L > X_C \Rightarrow \varphi > 0 \rightarrow$ A voltagem está adiantada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências altas. O circuito tem características indutivas.

Circuito capacitivo

$X_L < X_C \Rightarrow \varphi < 0 \rightarrow$ A voltagem está atrasada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências baixas. O circuito tem características capacitivas.

Circuito resistivo

$X_L = X_C \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Z = R \rightarrow$ A voltagem está em fase com a corrente. Ocorre para uma única frequência. O circuito tem características resistivas.



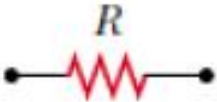
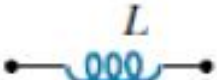
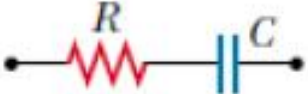
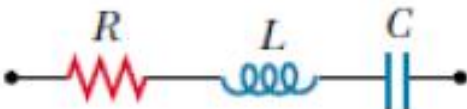
A corrente toma o valor máximo.

$$\Rightarrow i_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{R}$$



Valores de impedância

TABELA: Impedância e ângulos de fase para várias combinações de elementos no circuito

Elemento	Impedância Z	Fase φ
	R	0°
	X_C	-90°
	X_L	$+90^\circ$
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negativa, entre -90° e 0°
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positiva, entre 0° e 90°
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negativa, se $X_C > X_L$ Positiva, se $X_C < X_L$



Potência em Circuitos de Corrente Alternada

Potência instantânea impressa ao circuito pelo gerador de AC

$$P = \varepsilon i = \varepsilon_{máx} \operatorname{sen} \omega t \, i_{máx} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$\Rightarrow P = \varepsilon i = \varepsilon_{máx} i_{máx} \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$\text{fazendo} \rightarrow \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = \operatorname{sen} \omega t \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t$$

$$\Rightarrow P = \varepsilon_{máx} i_{máx} \operatorname{sen}^2 \omega t \cos \varphi - \varepsilon_{máx} i_{máx} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi$$

Potência média da fonte

$$i_{máx}, \varepsilon_{máx}, \varphi \text{ e } \omega \rightarrow \text{constantes no tempo}$$

$$\Rightarrow \langle \operatorname{sen}^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$



Potência em Circuitos de Corrente Alternada

como $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$

$$\Rightarrow \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

Logo

depende da fase entre a corrente e a voltagem

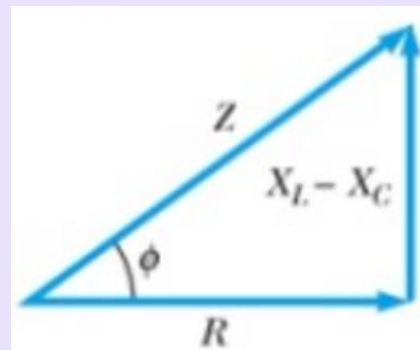
$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} i_{\text{máx}} \varepsilon_{\text{máx}} \cos \varphi$$

ou

$$\langle P \rangle = i_{\text{rms}} \varepsilon_{\text{rms}} \cos \varphi$$

$\cos \varphi \rightarrow$ fator de potência

Triângulo de impedância

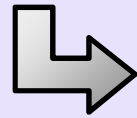


$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$



Potência em Circuitos de Corrente Alternada

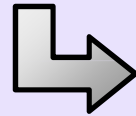
$$\Rightarrow \langle P \rangle = i_{rms} \varepsilon_{rms} \frac{R}{Z}$$



Potência média proporcionada pelo gerador

$$\text{como } i_{rms} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = i_{rms}^2 R$$



Potência média dissipada por efeito joule no resistor

“Vemos que não há perda de potência no indutor ou no capacitor”

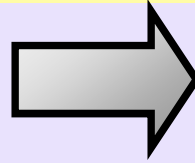


As reatâncias indutiva, X_L , e capacitiva, X_C , só modificam a fase, φ , o que provoca uma perda de potência no circuito.



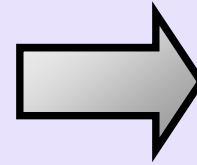
Ressonância no circuito RLC em série

O circuito RLC está em
ressonância



A corrente do circuito toma o
seu valor máximo

O valor para a corrente no circuito é dada
pela lei de Ohm generalizada



$$i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{Z}$$

$$\Rightarrow i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Note que a impedância depende da frequência de oscilação, assim o valor da corrente também depende da frequência.

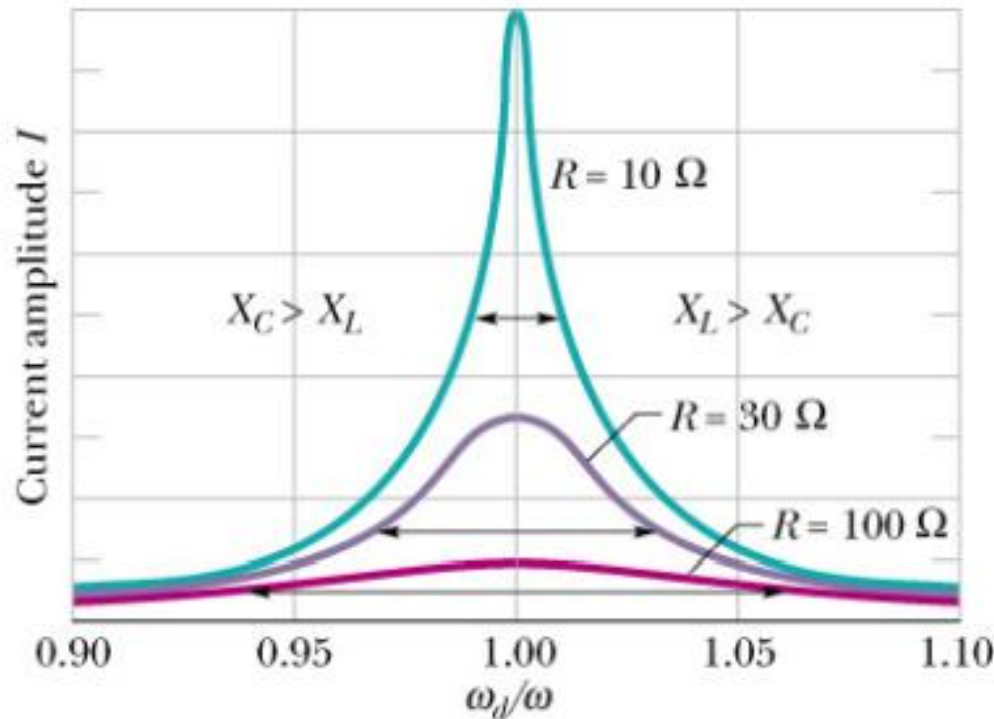
A corrente atinge o valor máximo quando: $\Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow Z = R$

$$\Rightarrow i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{R}$$

um circuito em ressonância
apresenta o valor mínimo para
a impedância



Ressonância no circuito RLC em série



Para que haja ressonância:

$$\Rightarrow X_L = X_C$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



frequência de
ressonância do circuito.

“A corrente em um circuito RLC em série atinge seu valor de pico quando a frequência ω da voltagem aplicada pelo gerador for igual à frequência natural ω_0 do circuito oscilador, que depende somente dos valores de L e C .”

⇒ na ressonância, o valor da corrente é limitado só pela resistência do circuito.



Potência média em função da frequência

$$\langle P \rangle = i_{rms}^2 R = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{Z^2} R$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{máx}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$



Potência média no circuito RLC em série

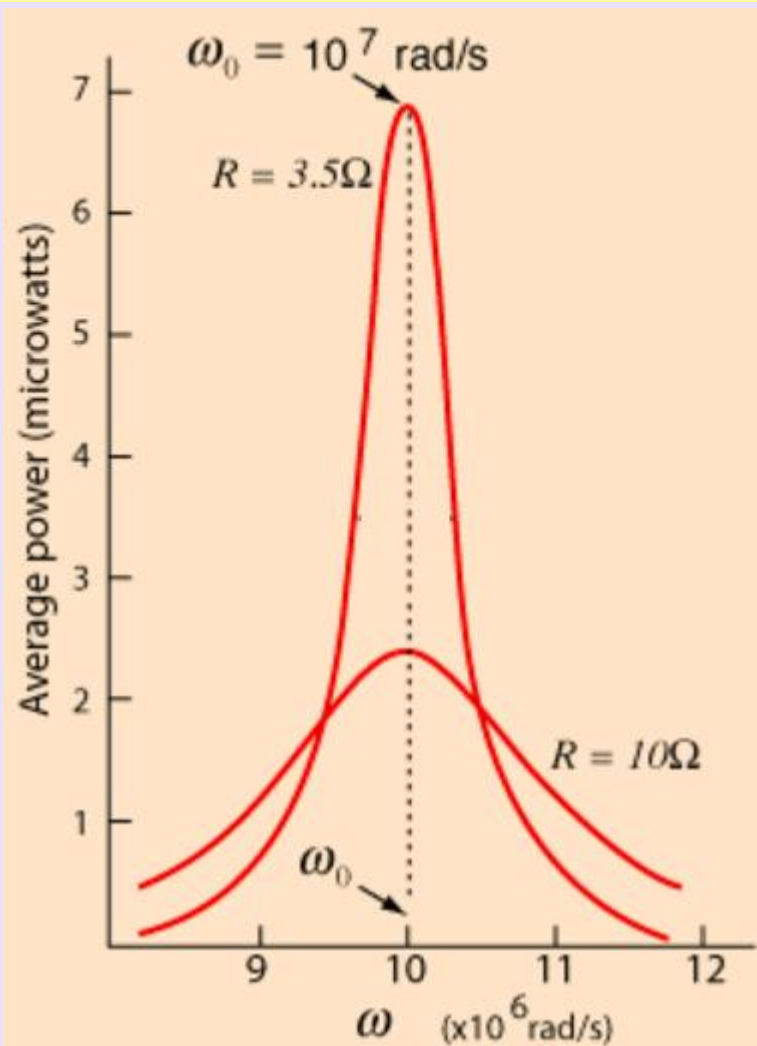
$$\text{como } X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} :$$

$$(X_L - X_C)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = L^2 \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2$$

$$\Rightarrow (X_L - X_C)^2 = \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$



Potência média em função da frequência



$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{máx}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Como pode ser visto na figura ao lado, na ressonância, onde $\omega = \omega_0$, a potência média dissipada no resistor é máxima e toma o seguinte valor:

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{R}$$

Quando mudamos a impedância de um circuito para seu valor mínimo, ou seja, fazemos $X_L = X_C$, falamos que estamos casando a impedância.



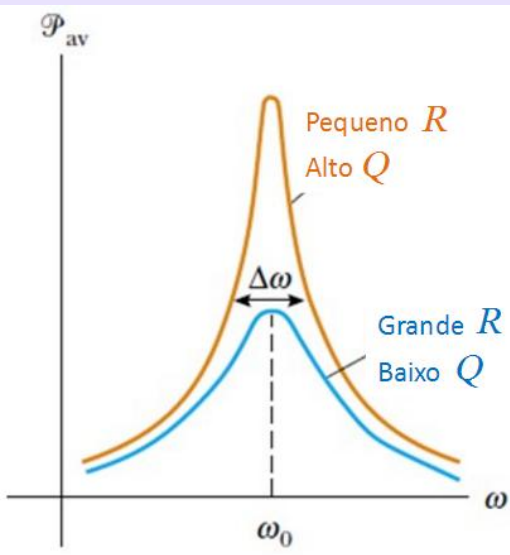
Fator de Qualidade

O fator de qualidade pode ser definido como:

$$Q = 2\pi \left\langle \frac{U_0(\text{energia armazenada})}{\Delta U(\text{energia perdida por ciclo})} \right\rangle_{\text{na ressonância}}$$

Energia armazenada em um ciclo $\Rightarrow U_0 = \frac{1}{2} L i_{\text{máx}}^2 = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}$

Energia dissipada $\Rightarrow \Delta U = \text{Potência} \times \text{Período} = \frac{1}{2} i_{\text{máx}}^2 R \times \frac{2\pi}{\omega_0}$



$$Q = 2\pi \frac{1}{2} L i_{\text{máx}}^2 \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{2}{i_{\text{máx}}^2 R}$$

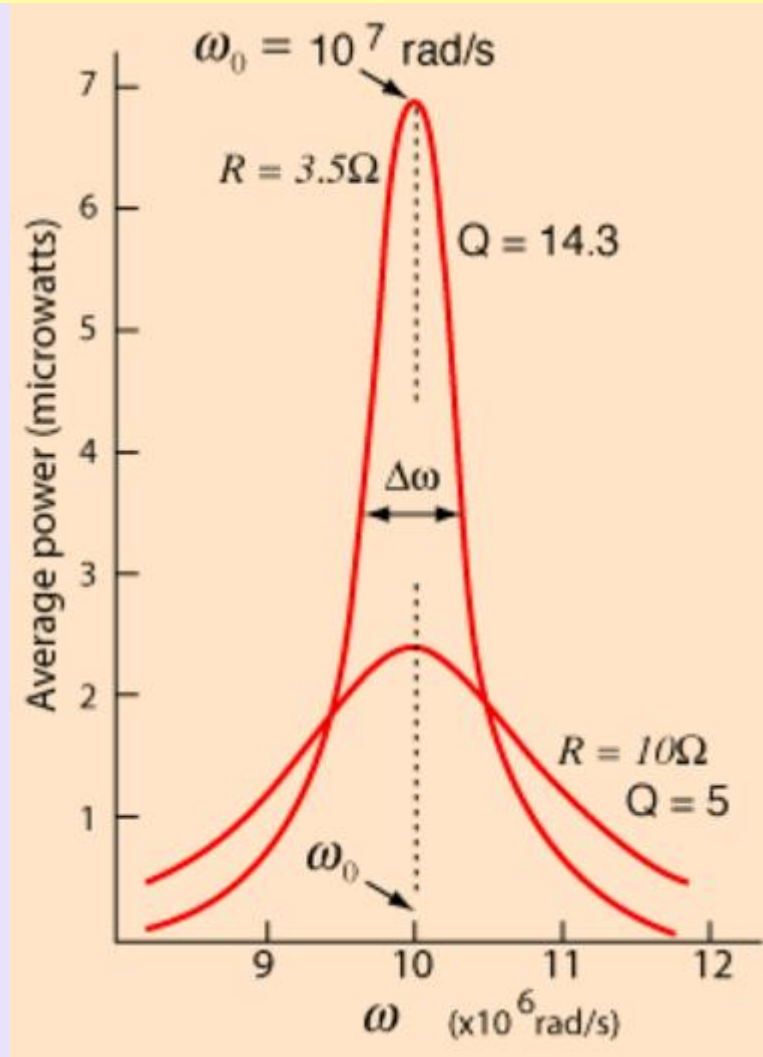
$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$



Mede o grau de seletividade de um circuito.



Fator de Qualidade



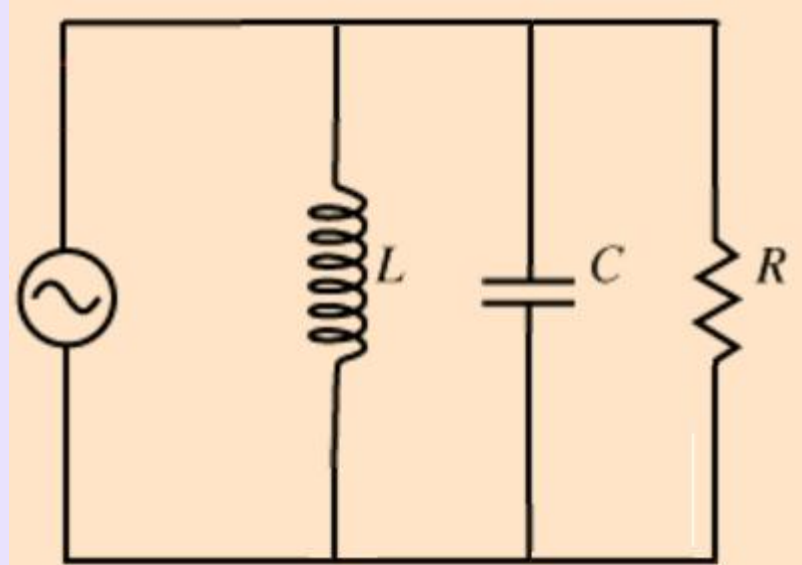
Como podemos ver na figura ao lado, quanto maior o valor do fator de qualidade de um circuito, maior é a potência transmitida. Na verdade o fator Q é uma medida do estreitamento da curva e pode ser aproximado por:

$$\Rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

O factor de qualidade elevado indica que o circuito é muito selectivo em torno da sua frequência de ressonância, enquanto que um factor de qualidade reduzido, indica que a largura de banda é bastante larga.



Circuito RLC em paralelo



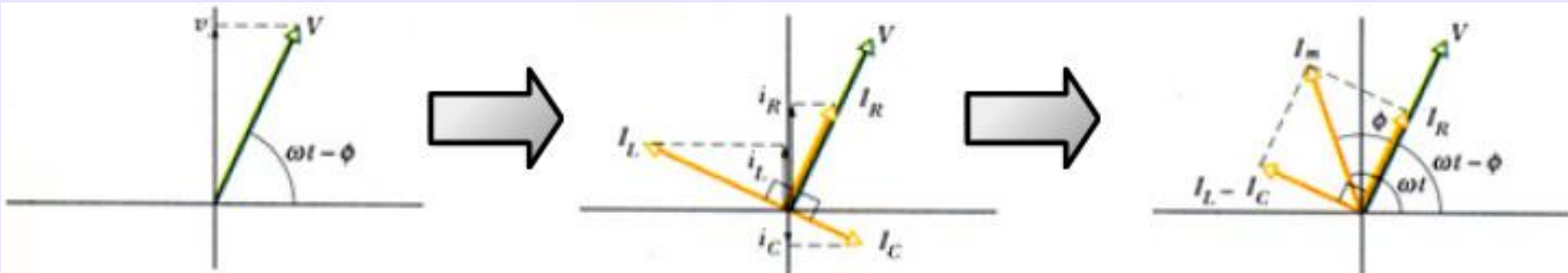
supondo que : $I_L > I_C$

$$\Rightarrow I_{máx} = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

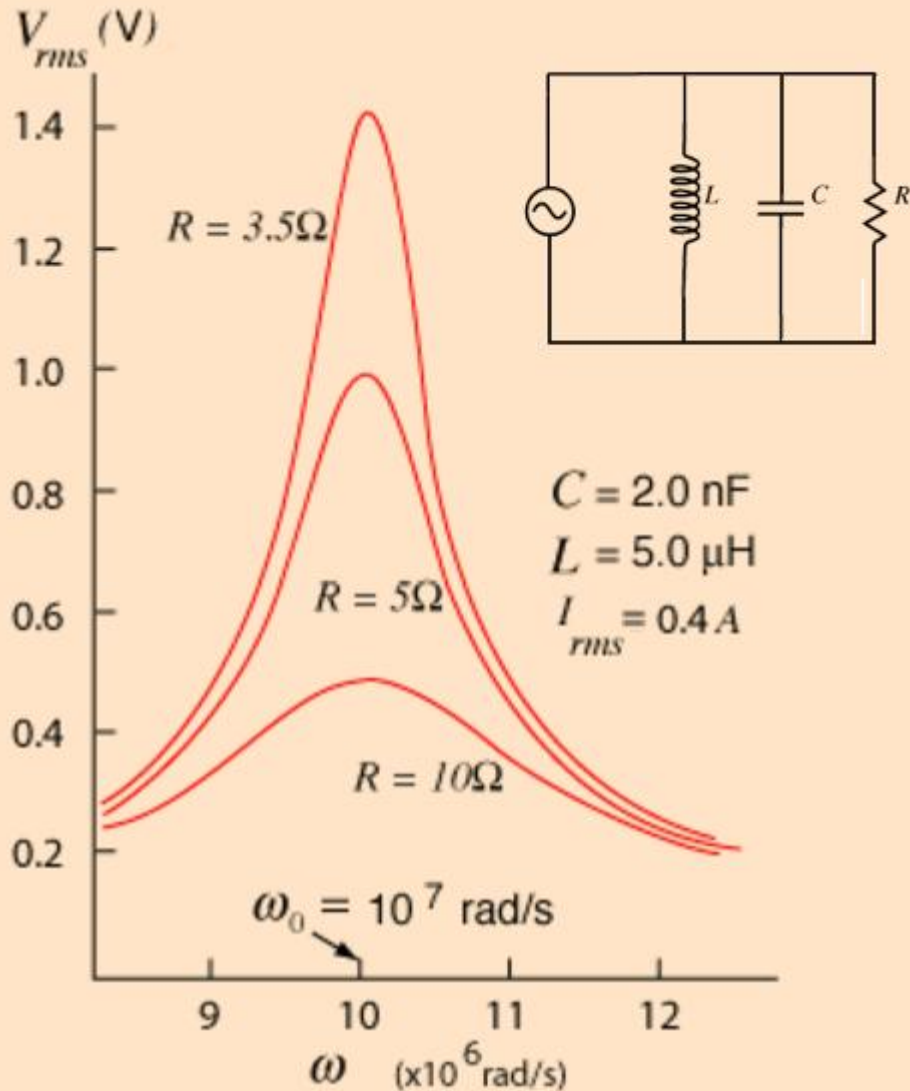
$$i_{rms} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}\right)^2} = \frac{V}{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$$



Circuito RLC em paralelo



Na ressonância:

$$\Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow Z = R$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

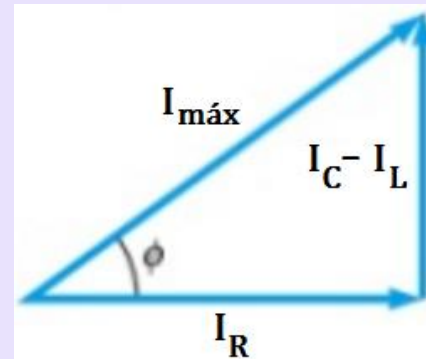


frequência de ressonância do circuito.

$$\langle P \rangle = i_{rms} \varepsilon_{rms} \cos\varphi$$

$\cos\varphi \rightarrow$ fator de potência

Triângulo de fasores



$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{I_R}{I_{máx}}$$

$$= \frac{Z}{R}$$



Constante de fase

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{R}{X_L} - \frac{R}{X_C} \right)$$

Circuito capacitivo

$X_L > X_C \Rightarrow \varphi < 0 \rightarrow$ A voltagem está adiantada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências baixas. O circuito tem características indutivas.

Circuito indutivo

$X_L < X_C \Rightarrow \varphi > 0 \rightarrow$ A voltagem está atrasada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências altas. O circuito tem características capacitivas.

Circuito resistivo

$X_L = X_C \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Z = R \rightarrow$ A voltagem está em fase com a corrente. Ocorre para uma única frequência. O circuito tem características resistivas.



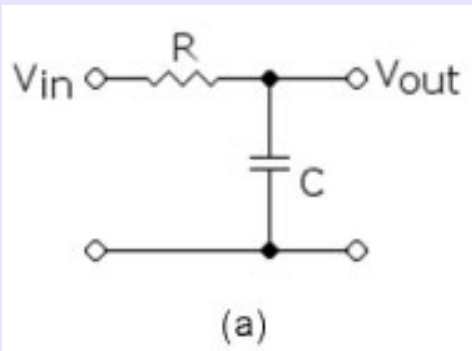
A corrente toma o valor máximo.

$$\Rightarrow i_{máx} = \frac{\varepsilon_{máx}}{R}$$



Filtros capacitivos

Filtro passa-baixa



$$V_{in} = i_{rms} Z$$

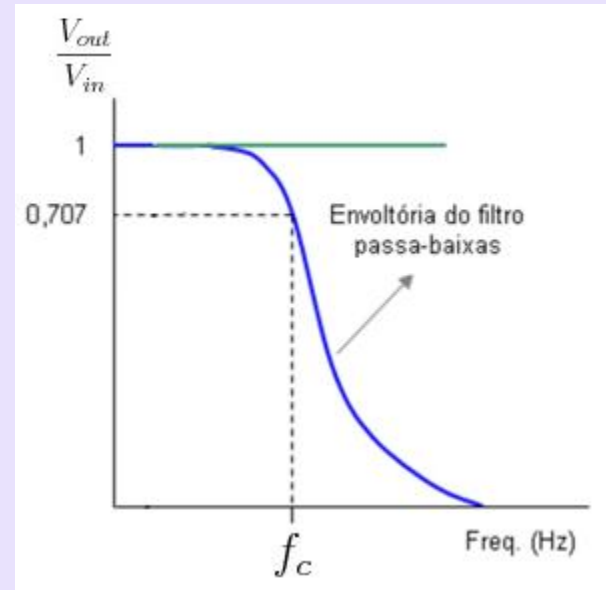
$$V_{out} = i_{rms} X_C$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_C}\right)^2 + 1}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f RC)^2 + 1}}$$

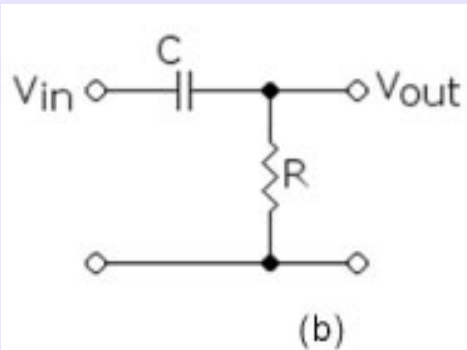
$$\tau = RC \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + 1}}$$



Filtros capacitivos

Filtro passa-alta



$$V_{in} = i_{rms} Z$$

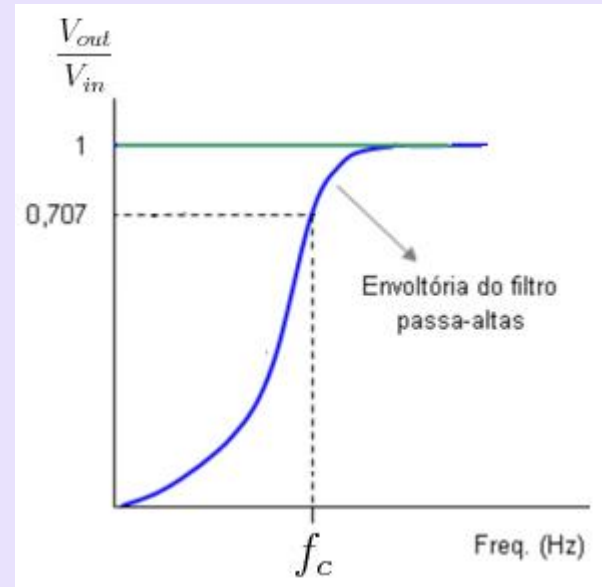
$$V_{out} = i_{rms} R$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_C}{R}\right)^2}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f RC}\right)^2}}$$

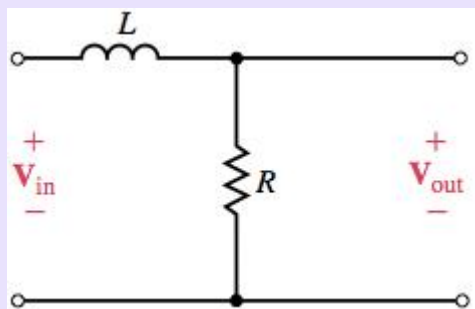
$$\tau = RC \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Filtros Indutivos

Filtro passa-baixa



$$V_{in} = i_{rms} Z$$

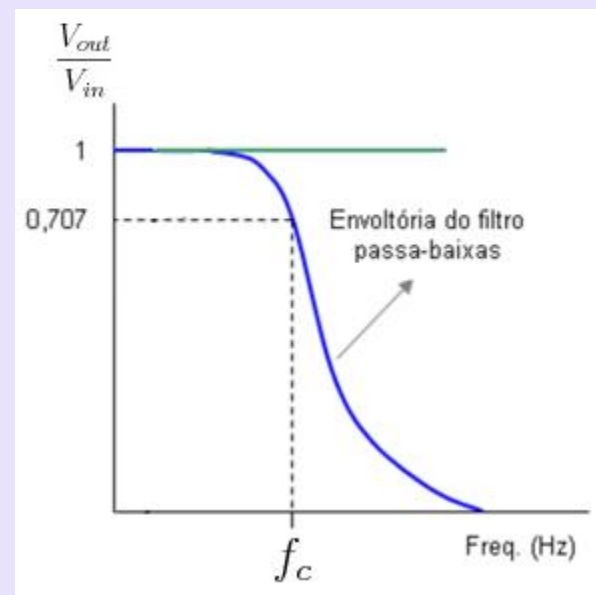
$$V_{out} = i_{rms} R$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_L}{R}\right)^2}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f L}{R}\right)^2}}$$

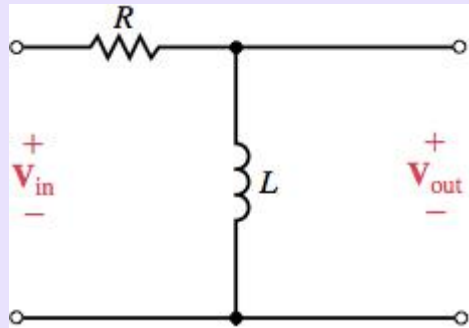
$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + 1}}$$



Filtros Indutivos

Filtro passa-alta



$$V_{in} = i_{rms} Z$$

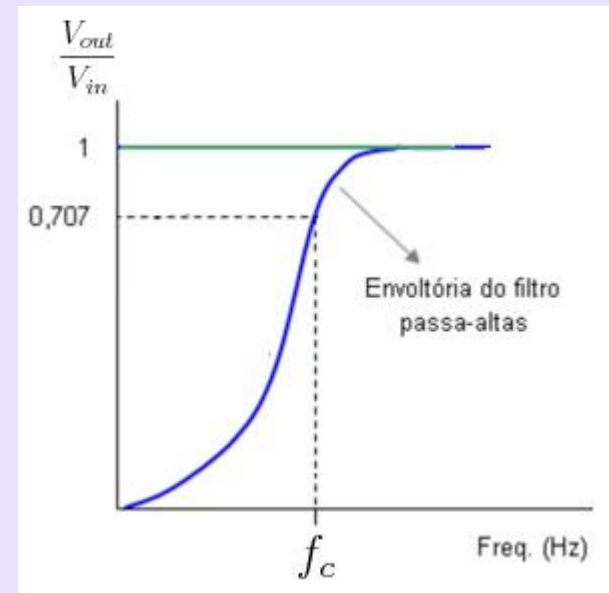
$$V_{out} = i_{rms} X_L$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_L}\right)^2 + 1}}$$

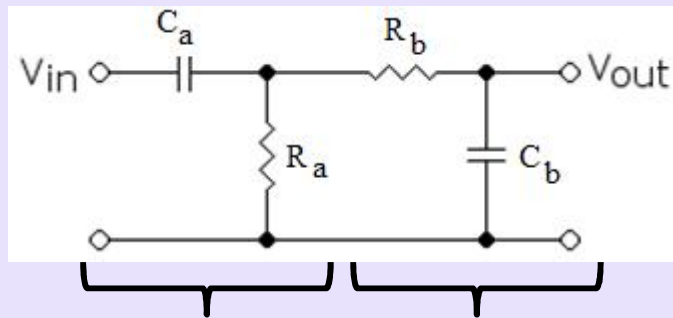
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{2\pi f L}\right)^2 + 1}}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Filtro passa-banda



$$f_a = \frac{1}{2\pi R_a C_a}$$

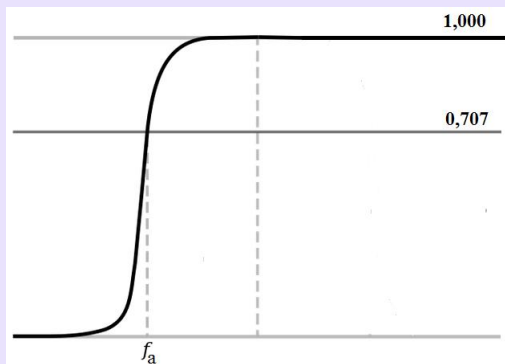
$$f_b = \frac{1}{2\pi R_b C_b}$$

$$\frac{V_{out}^a}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_a}{f}\right)^2}}$$

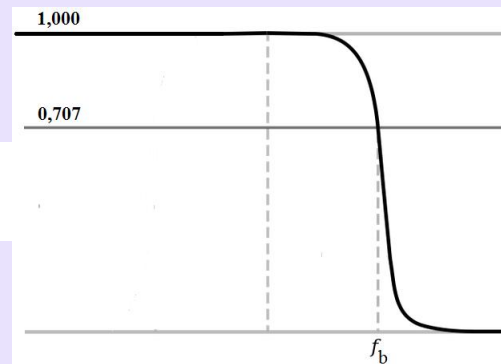
$$\frac{V_{out}}{V_{in}^a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_b}\right)^2}}$$

$$V_{in}^a = V_{out}^a \Rightarrow$$

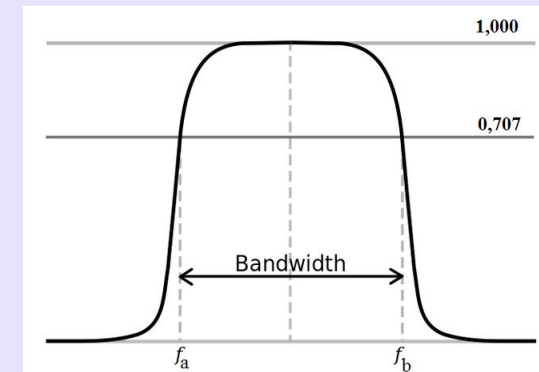
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_a}{f}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_b}\right)^2}}$$



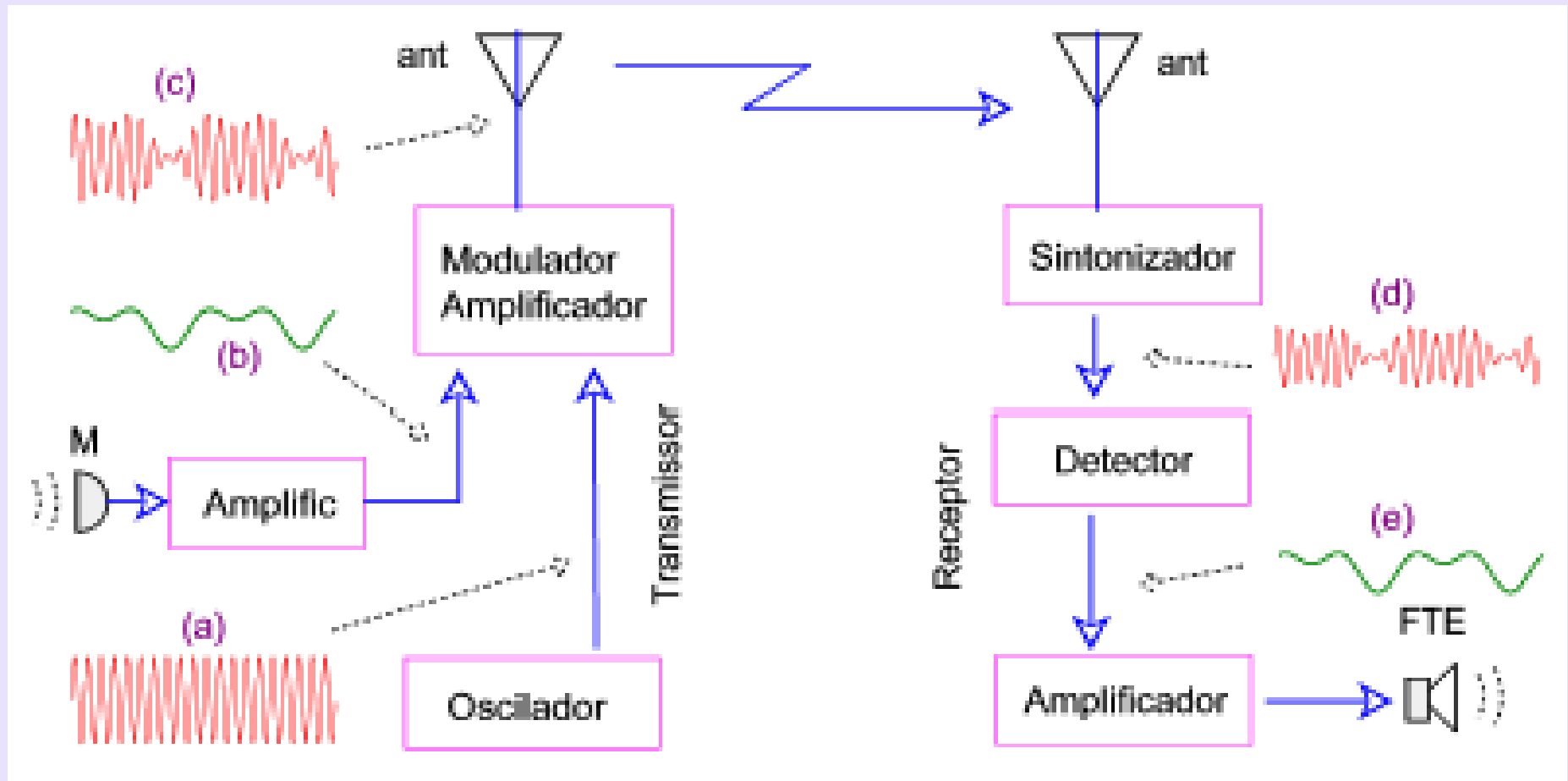
×



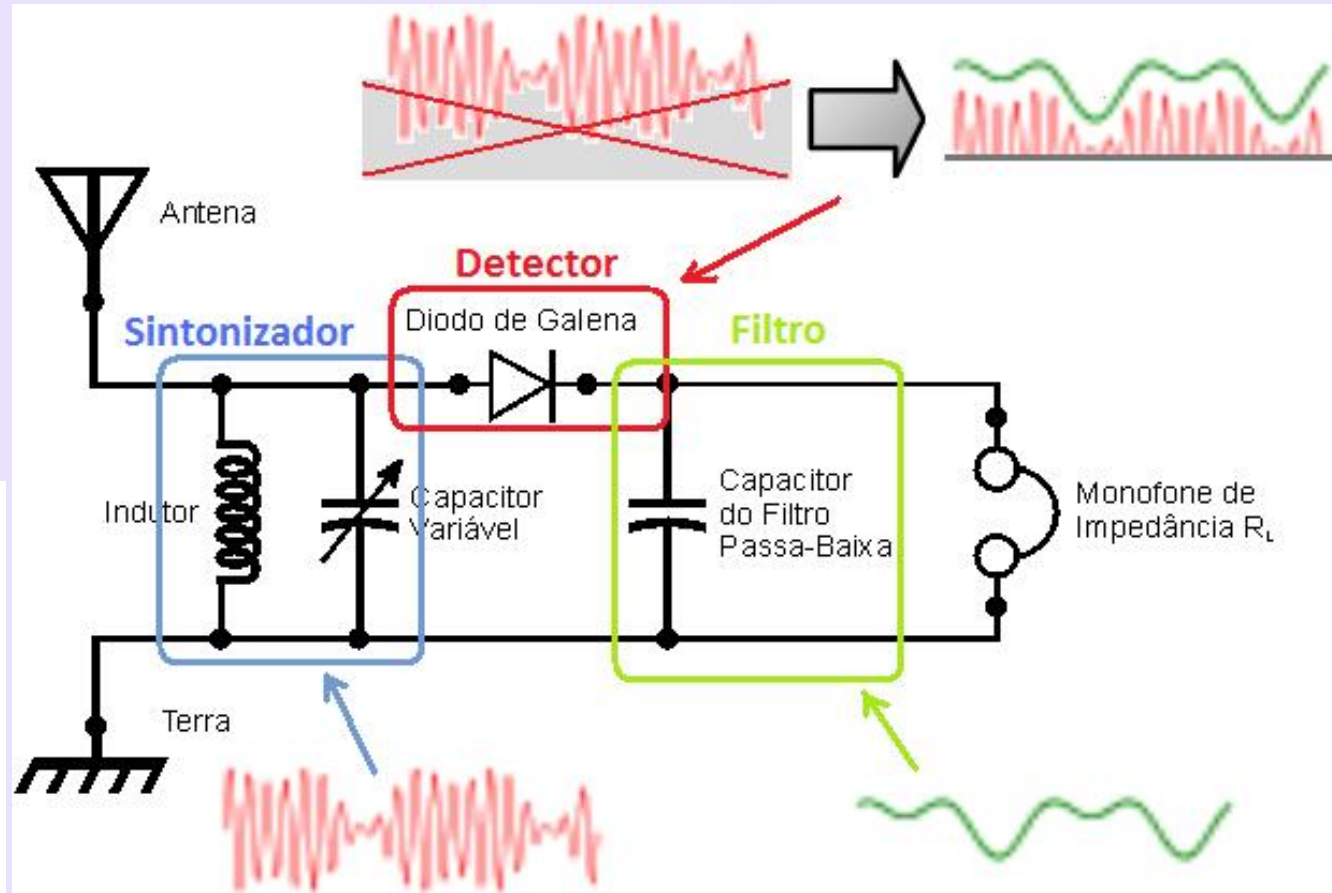
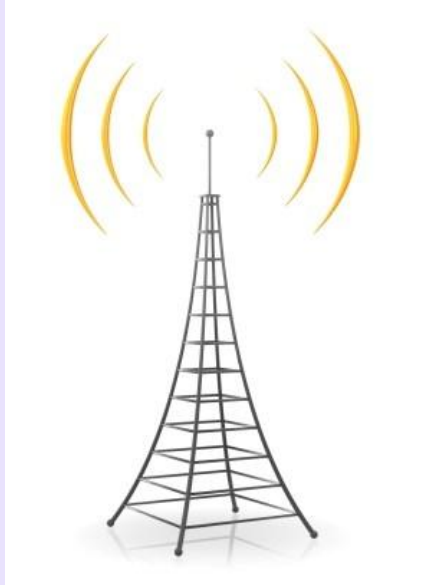
=



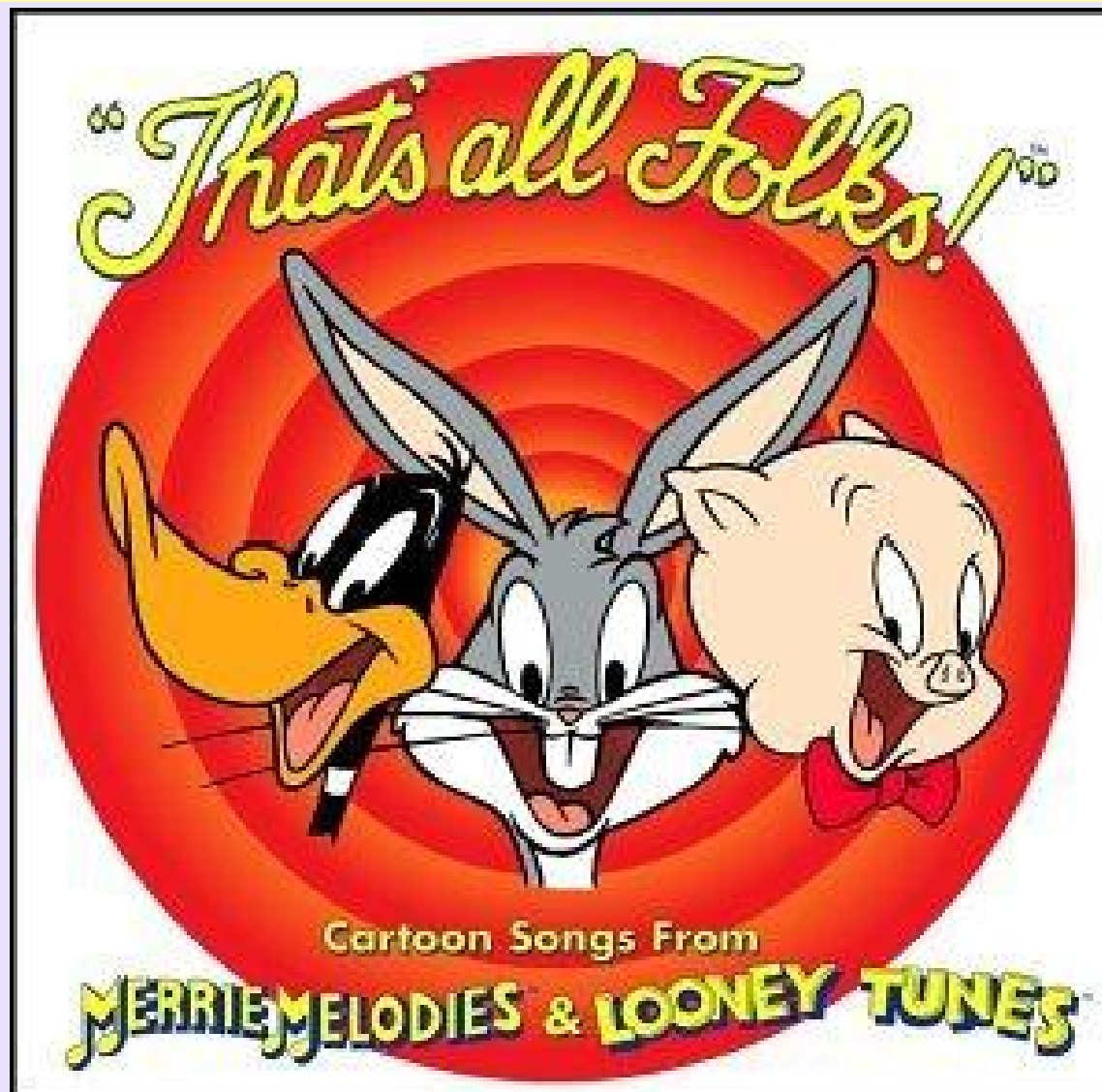
Aplicação (Rádio AM)



Rádio de galena



FIM



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense